1 Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a: $\int_p^{p+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$ et montrer que pour tout $p \geq 2$, on a: $\int_{p-1}^{p} \frac{dx}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}$

Donc on intègre

on obtient

$$\int_p^{p+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{\sqrt{p}}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_p^{p+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq \frac{1}{\sqrt{p}}(p+1-p)$$

donc $\forall p \geq 1$; $\boxed{\int_p^{p+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}}}$

. par suite

$p \geq 2$ on a $1 \leq p-1 \leq x \leq p$

$\Rightarrow \sqrt{p-1} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{p}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}$: les deux fonctions sont continues sur $[p-1, p]$

$\forall p \geq 2$,

on intègre